A CONJECTURA *abc*

JULIO C. ANDRADE

Resumo. Neste pequeno artigo expositório apresentamos a conjectura *abc* usando quatro diferentes formulações. Nós iremos oferecer uma lista de algumas aplicações e consequências da conjectura, discutiremos uma idéia da demonstração do Último Teorema de Fermat fazendo uso da conjectura *abc* e para concluir fazemos uma menção sobre uma possível e atual demonstração deste famoso problema.

1. Introdução e Motivação

A conjectura *abc* é um problema em aberto (até o momento) em teoria dos números, ela também é conhecida como **Conjectura de Oesterlé-Masser**. Foi primeiramente proposta por Joseph Oesterlé [5] e David Masser [3] respectivamente em 1988 e 1985. Uma das principais importâncias da conjectura *abc* é que a sua validade implica profundas consequências em alguns dos mais difíceis problemas em matemática, de fato muitas conjecturas e problemas famosos em teoria dos números seguem da conjectura *abc*. Nas palavras do matemático Dorian Goldfeld [1] "a conjectura *abc* é o mais importante problema em aberto de análise Diofantina".

Conjectura 1.1 (Formulação Ingênua da Conjectura *abc*)**.** *Em termos simples, a conjectura abc, diz que se considerarmos* 3 *números inteiros positivos,* $a, b, c,$ *os quais não possuem nenhum fator em comum e satisfazem* $a + b = c$ *e se denotarmos por* d *o produto dos fatores primos distintos do número abc temos então que* d*, normalmente, não fica muito menor do que* c*. Ou seja, se os números* a *e* b *são divisíveis por grandes potências de números primos, então o número* c *geralmente não é divisível por grandes potências de primos.*

Iremos apresentar na próxima seção a descrição precisa da conjectura *abc*. Um fato histórico interessante é que a conjectura *abc* é de fato um análogo para os números inteiros do teorema conhecido como **Teorema de Mason–Stothers** [10, 2].

Teorema 1.2 (Teorema de Mason–Stothers)**.** *Se* $a(t), b(t), c(t) \in \mathbb{C}[t]$ *não possuem nenhuma raiz em comum e nos fornecem uma solução genuína para* $a(t) + b(t) = c(t)$*, então*

$$\max\{\partial(a(t)), \partial(b(t)), \partial(c(t))\} \leq \partial(\mathrm{rad}(abc)) - 1,$$

O autor recebe suporte de uma bolsa de pós–doutorado do National Science Foundation (NSF) e uma bolsa de pós-doutorado da Universidade de Brown.

onde $\partial(a(t))$ *indica o grau do polinômio* $a(t)$ *e* $\mathrm{rad}(f)$ *é o polinômio de menor grau que possui as mesmas raízes de* f*, ou seja,* $\partial(\mathrm{rad}(f))$ *nos fornece o número de raízes distintas de* f*.*

Vejamos como o teorema de Mason–Stothers está relacionado com a formulação da conjectura *abc*.

2. Algumas Formulações da Conjectura *abc*

Para todo número natural n, nós definimos $r(n) = \prod_{p|n} p$, i.e., $r(n)$ é o produto de todos os números primos p que são divisores de n. É fácil de ver que $r(n)$ é o divisor livre de quadrados e maximal de n, e chamaremos $r(n)$ o *radical* de n. Vamos também dizer que um número inteiro n é *bem composto*, se $r(n)$ é "pequeno"com respeito a n, ou equivalentemente, se $\frac{\log n}{\log r(n)}$ é "grande". Por exemplo, se

$$n_1 = 2^{41} \cdot 3^{15} \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 97^{10}, \text{ então } r(n_1) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 97 = 44814$$

e

$$\frac{\log n_1}{\log r(n_1)} = 9.316746.$$

Assim n_1 é bem composto. Você consegue encontrar alguns exemplos de números bem compostos e não bem compostos? O que podemos dizer do número $n_2 = 1254792$? Note que ser grande ou pequeno é ainda relativo neste contexto e portanto iremos adotar aqui que "grande"significa ser maior que 1.5 e "pequeno"caso contrário.

Conjectura 2.1 (Forma Preliminar da Conjectura *abc*)**.** *Se* $a + b = c$*, onde* a, b *são números naturais e primos entre si, então o número abc não pode ser bem composto. Em particular, a soma de dois números naturais que são primos entre si e bem compostos não pode ser bem composto.*

Vamos agora apresentar outra formulação para a conjectura *abc*.

Conjectura 2.2 (Forma Heurística da Conjectura *abc*)**.** *Para todo* $\varepsilon > 0$*, existe somente uma quantidade finita de triplas de números naturais que são primos entre si e* $a + b = c$ *tal que* $c > d^{1+\varepsilon}$*, onde* d *denota o produto dos fatores primos distintos de abc.*

Por exemplo, se

$$\begin{aligned} a &= 16 = 2^4, \\ b &= 17, \\ c &= 16 + 17 = 33 = 3 \cdot 11, \end{aligned}$$

temos que $d = 1122 > c$. Portanto para todo $\varepsilon > 0$, c não é maior do que $d^{1+\varepsilon}$. Estamos agora em posição de coletar as nossas notações anteriores e apresentar a versão definitiva da conjectura *abc*.

Conjectura 2.3 (Conjectura *abc* de Oesterlé e Masser)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante κ_ε tal que se a, b e c são números primos entre si para o qual*

$$a + b = c, \tag{1}$$

então

$$c \leq \kappa_\varepsilon \left(\prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p \mid abc}} p \right)^{1+\varepsilon} = \kappa_\varepsilon \left(\mathrm{rad}(abc)\right)^{1+\varepsilon}. \tag{2}$$

3. O Último Teorema de Fermat e a Conjectura *abc*

Nesta seção iremos apresentar um rascunho da demonstração do Último Teorema de Fermat usando a conjectura *abc*. Notamos que este é apenas um rascunho da demonstração e recomendamos ao leitor interessado no Último Teorema de Fermat a consultar o excelente livro por Simon Singh [9].

Teorema 3.1 (O Último Teorema de Fermat)**.** *Não existem soluções para*

$$x^n + y^n = z^n \tag{3}$$

para $n \geq 3$, com $x, y, z \neq 0$.

Idéia da Demonstração. Seja

$$x^n + y^n = z^n$$

onde x, y, z são números inteiros positivos e primos entre si, então tomamos

$$a = x^n, b = y^n, c = z^n$$

na conjectura *abc*. Nós não temos nenhuma maneira precisa de determinar o produto dos números primos que dividem $x^n y^n z^n$, mas nós sabemos que estes são exatamente os primos que dividem xyz, e assim o produto de tais primos deve ser $\leq xyz$. Mais ainda, uma vez que x e y são positivos, eles são ambos menores do que z e assim $xyz < z^3$. A conjectura *abc* portanto nos fornece que

$$z^n \leq \kappa_\varepsilon (z^3)^{1+\varepsilon},$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon = 1/6$ e $n \geq 4$, temos que $n - 3(1+\varepsilon) \geq n/8$, e assim nós deduzimos da conjectura *abc* que

$$z^n \leq \kappa_{1/6}^8.$$

Nós assim provamos que qualquer solução de (3) com $n \geq 4$, os números x^n, y^n, z^n são todos menores do que um limite absoluto e assim não existem mais do que uma quantidade finita de tais soluções. E Euler mostrou que não há soluções para (3) para $n = 3$ Agora imaginemos que nós temos em mão uma versão explicita da conjectura *abc*, digamos $\kappa_\varepsilon = \varepsilon = 1$, então poderíamos dar uma cota superior pra todas as soluções para a equação de Fermat e calcularmos até tal cota para então finalmente determinarmos se existem quaisquer soluções ou não. ☐

De fato, alguns matemáticos acreditam que a conjectura *abc* é válida com $\kappa_\varepsilon = \varepsilon = 1$. Se assim for, o Último Teorema de Fermat segue para $n \geq 6$ imediatamente, e os casos $n = 3, 4, 5$ são conhecidos a quase 200 anos, veja [7].

4. Algumas Consequências da Conjectura *abc*

A conjectura *abc* tem um enorme número de consequências em profundas questões da teoria dos números. Vamos citar apenas três delas:

- A conjectura de Fermat–Catalan, uma generalização do Último Teorema de Fermat sobre potências que são somas de potências.[6]
- A existência de infinitos primos que não são primos Wieferich. [8]
- A forma fraca da conjectura de Marshall Hall sobre a separação entre quadrados e cubos de números inteiros.[4]

5. O futuro da conjectura *abc*

Em agosto de 2012, o matemático Shinichi Mochizuki disponibilizou uma série de quatro artigos contendo uma séria alegação que ele tinha obtido uma demonstração da conjectura *abc*. A teoria utilizada por Shinichi Mochizuki para apresentar a sua "demonstração"da conjectura *abc* é conhecida como teoria de Teichmüller inter–universal. Os especialistas irão levar meses para checar a nova matemática desenvolvida por Mochizuki, o qual foi desenvolvida durante décadas e apresenta mais de 500 páginas em artigos. Pode ser o caso de no futuro termos o teorema *abc* e não mais apenas uma conjectura e isso definitivamente irá tornar Mochizuki uma página a sempre ser lembrada na história da matemática.

Referências

[1] Goldfeld, D., *Beyond the last theorem.* Math Horizons (1996) (September): 26-34.
[2] Mason, R. C., *Diophantine Equations over Function Fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 96, Cambridge, England: Cambridge University Press, 1984.
[3] Masser, D. W., *Open problems*, in Chen, W. W. L., Proceedings of the Symposium on Analytic Number Theory (1985), London: Imperial College.
[4] Nitaj, A., *La conjecture abc.* Enseign. Math. (1996), 42 (12): 3-24.
[5] Oesterlé, J., *Nouvelles approches du "théorème"de Fermat*, Astérisque, Séminaire Bourbaki, (1988) 694 (161): 165-186.
[6] Pomerance, C., *Computational Number Theory.* The Princeton Companion to Mathematics. Princeton University Press. pp. 361-362, 2008.
[7] Ribenboim, P., 13 *Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer–Verlag, New York and Heildelberg, 1979.
[8] Silverman, J. H., *Wieferich's criterion and the abc-conjecture.* Journal of Number Theory (1988) 30 (2): 226-237.
[9] Singh, S., *O último teorema de Fermat*, São Paulo, Editora Record, 2008.
[10] Stothers, W. W., *Polynomial identities and hauptmoduln*, Quarterly J. Math. Oxford, (1981) 2 **32**: 349-370.

Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics (ICERM) and Department of Mathematics, Brown University, Providence–RI–02903, U.S.A.
E-mail address: julio_andrade@brown.edu